

Operación sobre las Señales

Capítulo 2. (versión 1)

Prof. José Ferrer, Br. Alejandro Pérez, Br. Gabriel Marzinotto
Dpto. Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar

Abril-Julio 2013

Abstract

En estas notas se presentan dos tipos importantes de operaciones unitarias sobre señales con una base de tiempo T y conjunto de valores K , este último puede ser un cuerpo de números (R o C) o conjunto finito de símbolos. También se introduce dos operaciones de extrema utilidad en las interacciones entre el mundo de las señales discretas y el mundo de las señales de tiempo continuo; específicamente, las operaciones de muestreo y de interpolación.

1 Operación sobre o Manipulación de Señales

En estas notas nos ocuparemos de varias operaciones que modifican las señales y que servirán de base para definir y entender los conceptos más importantes de la teoría de sistema.

Recordemos que dados un conjunto K y una base de tiempo T , S_e denotará al conjunto de todas las señales con eje de tiempo T y con valores en K ; o sea,

$$S_e = \{f : T \rightarrow K\}$$

Es posible definir dos tipos de operaciones fundamentales sobre las señales $f \in S_e$:

- a) Operaciones unarias que no son más que operaciones que involucran una sola señal
- b) Operaciones binarias que involucran dos señales.

Para precisar, suponga que tenemos dos conjuntos de señales $S_e^{(i)}, i = 1, 2$. O sea,

$$S_e^{(i)} = \{f : T^{(i)} \rightarrow K^{(i)}\}, i = 1, 2.$$

Una operación unaria no es mas que

$$\Psi : S_e^{(1)} \rightarrow S_e^{(2)}$$

y donde, si denotamos por f a la señal original (o vieja) y a f_{nuev} a la señal modificada (o nueva) bajo la "transformación", "aplicación" u "operador", Ψ , entonces

$$f_{nuev} = \Psi \circ f_{viej}$$

donde "o" denota la composición de funciones. En consecuencia,

$$f_{nuev} = \Psi [f_{viej}]$$

y el proceso completo se puede representar de la siguiente forma: $\forall f_{viej} \in S_e^{(1)}$

$$\begin{array}{ccc} f_{viej} : T^{(1)} & \rightarrow & K^{(1)} \\ & \downarrow \Psi & \\ f_{nuev} : T^{(2)} & \rightarrow & K^{(2)} \end{array}$$

Es importante recalcar que puede suceder que $T^{(1)} = T^{(2)}$ y/o $K^{(1)} = K^{(2)}$, y en consecuencia, pudiéramos tener cuatro tipos o clases de señales unarias. Lo que nos dice que la operación Ψ puede ser realmente compleja; sin embargo, en estas notas sólo estudiaremos dos tipos de operaciones unarias de mucha importancia en la práctica y que sirven de base para generar otras operaciones más complejas sobre señales. Específicamente, operaciones que modifican el rango o el dominio de la señal involucrada.

DEFINICION 1 Dada una señal $f \in S_e$, o sea, $f : T \rightarrow K$, entonces:

1. el dominio de la señal se define como

$$\text{dom}(f) = T$$

2. el rango de la señal se define como

$$\text{rango}(f) = \{\alpha \in K : \exists \lambda \in T \text{ tal que } \alpha = f(\lambda)\} \subset K$$

3. el grafo de la señal se define como

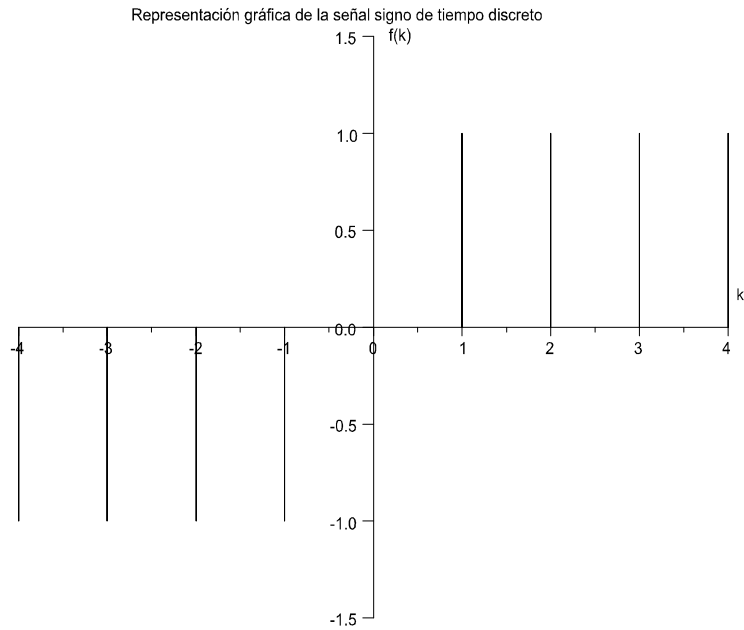
$$\text{grafo}(f) = \{(\lambda, \alpha) \in T \times K : \alpha = f(\lambda)\}$$

EJEMPLO 2 Considere la señal signo de tiempo discreto

$$\text{signo} : Z \rightarrow R$$

definida por

$$\text{signo}(k) = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ 0, & k = 0 \\ -1, & k < 0. \end{cases}$$



y en la figura (1) se muestra parte del grafo de la señal ya que esta solo limitada al intervalo discreto $[-4, 4] \subset \mathbb{Z}$, la cual se generó con el siguiente código en Scilab:

```
clear ; clc; close ;
L = 4; // Límite Superior
k = -L:L;
f = [-ones(1,L) ,0, ones(1,L)];
a= gca ();
a.thickness = 0.2;
a.y_location = "middle";
plot2d3 ( 'gnn' ,k,f)
xtitle ( 'Señal signo de tiempo discreto', 'k', 'f(k)');
```

El dominio de la señal signo es

$$\text{rango}(\text{signo}) = \mathbb{Z}$$

mientras que el rango es

$$\text{rango}(\text{signo}) = \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{R}$$

1.1 Operaciones Unarias sobre el Rango de las señales

Operaciones o transformaciones sobre el rango de las señales son aquellas operaciones unarias (que actúan sobre una sola señal a la vez)

$$\Psi : S_e^{(1)} \rightarrow S_e^{(2)}$$

donde: a) $T^{(1)} = T^{(2)} = T$, o sea, la base de tiempo de las señales no cambia, y b) para todo $f_{viej} \in T$

$$\begin{aligned} rango(f_{viej}) &= K^{(1)} \\ rango(f_{nuev}) &= K^{(2)} \end{aligned}$$

DEFINICION 3 Una **operación sobre el rango** de una señal es una transformación unaria del tipo

$$\Psi : S_e^{(1)} \rightarrow S_e^{(2)}$$

donde el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f_{viej}} & K^{(1)} \\ \uparrow \iota & \lceil = \rceil & \downarrow \Psi \\ T & \xrightarrow{f_{nuev}} & K^{(2)} \end{array}$$

con ι es la función identidad, es conmutativo :

$$\begin{aligned} f_{nuev} &= \Psi \circ f_{viej} \circ \iota \\ &= \Psi \circ f_{viej} \end{aligned}$$

O sea, para toda $f_{viej} \in S_e^{(1)}$, y para cada $\lambda \in T$

$$f_{nuev}(\lambda) = \Psi(f_{viej}(\lambda))$$

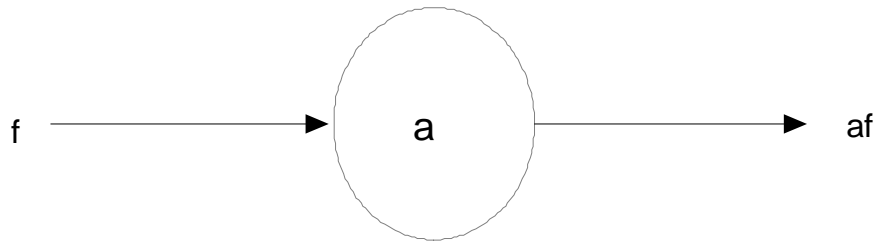
DEFINICION 4 Escalamiento. Sea K un cuerpo de números y $a \in K$, fijo pero arbitrario. Dada una señal $f \in S_e$, entonces se define la operación de escalamiento de f por a unidades a la transformación

$$amp_a : S_e \rightarrow S$$

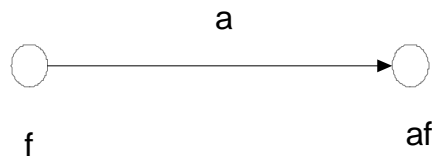
tal que para todo $\lambda \in T$,

$$\begin{aligned} amp_a(f)(\lambda) &= (af)(\lambda) \\ &= af(\lambda) \end{aligned}$$

Cuando el escalar a es tal que $|a| > 1$ se dice que la señal se ha amplificado a unidades. mientras que si $|a| < 1$, se dice que la señal se ha atenuado a unidades. Tal operación se representa esquemáticamente como se muestra en la figura (1).



(i) representación simbólica de escalamiento



(ii) representación en diagrama de flujo de escalamiento

Figure 1: Representación de la operación de escalamiento por un factor "a"

EJEMPLO 5 Si la señal f es una señal senoidal de tiempo continuo

$$f(t) = 2 \sin(2\pi t + 30) \quad t \in \mathbb{R}$$

Entonces si $a = 3\sqrt{2}$, la señal escalada por el factor a será

$$\begin{aligned} \text{amp}_{3\sqrt{2}}(f(t)) &= 3\sqrt{2} \left[2 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= 6\sqrt{2} \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

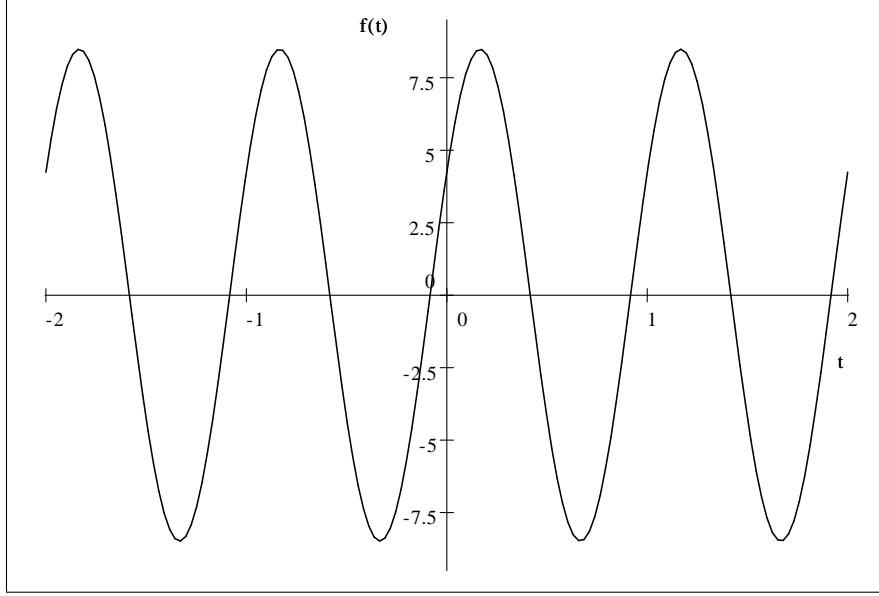
para $t \in \mathbb{R}$, cuyo grafo se muestra en la figura (1.1) para el intervalo $[-2, 2] \subset T = \mathbb{R}$.

DEFINICION 6 Se define como operación de cuantización a cualquier transformación

$$\Psi : S_e^{(1)} \rightarrow S_e^{(2)}$$

donde

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f_{viej}} & K^{(1)} \\ \uparrow \iota & [=] & \downarrow \Psi \\ T & \xrightarrow{f_{nuev}} & K^{(2)} \end{array}$$



y en la cual para toda $f_{viej} \in S_e^{(1)}$, y para cada $\lambda \in T$

$$f_{nuev}(\lambda) = \Psi(f_{viej}(\lambda))$$

y rango(f_{nuev}) es **contable** (finito o numerable).

EJEMPLO 7 Cuantización Finita y Uniforme. Suponga que $f_{viej} \in S_e$ es una señal con rango $(f_{viej}) \subset R$, $Q \in R$ un número real positivo y defina la siguiente operación de cuantización

$$\Psi_Q^{cua} : S_e^{(1)} \rightarrow S_e^{(2)}$$

donde:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f_{viej}} & K^{(1)} \\ \uparrow \iota & [=] & \downarrow \Psi_Q^{cua} \\ T & \rightarrow & K^{(2)} \\ & & f_{nuev} \end{array}$$

con

$$\begin{aligned} f_{nuev} &= \Psi_Q^{cua} \circ f_{viej} \circ \iota \\ &= \Psi_Q^{cua} \circ f_{viej} \end{aligned}$$

$$\text{rango}(f_{nuev}) = \{-(M-1)Q, \dots, -Q, 0, Q, \dots, (M-1)Q\} = \underline{M}(-Q, Q) = K^{(2)} \subset R$$

y

$$f_{nuev} = \Psi_Q^{cua}(f_{viej}) = \begin{cases} -(M-1)Q, & f_{viej} < -(M-1)Q, \\ Q \text{center} \left(\frac{f_{viej}}{Q} \right), & -(M-1)Q \leq f_{viej} < (M-1)Q \\ (M-1)Q, & f_{viej} \geq (M-1)Q \end{cases}$$

donde $\text{enter}(\cdot)$ representa la función **parte entera**. O sea, $\text{enter}(x)$ es el más grande número entero menor o igual que el número real x . La constante M es un número entero positivo y $2M + 1$ representa el número de niveles de cuantización, mientras que Q se denomina intervalo o paso de cuantización. En tal caso, se dice que el operador Ψ_Q^{cua} representa la operación de cuantización finita (ya que $\text{rango}(f_{nuev})$ es finito) y uniforme.

La cuantización finita y uniforme, por lo tanto, asigna a todos los valores de la señal f_{viej} por debajo de $-(M - 1)Q$, el valor $-(M - 1)Q$, los valores de la señal entre $-(M - 1)Q$ y $(M - 1)Q$ al elemento de

$$\underline{M}(-Q, Q) = \{-(M - 1)Q, \dots, -Q, 0, Q, \dots, (M - 1)Q\}$$

mientras que a los valores de la señal por encima de $(M - 1)Q$ se les asigna el valor $(M - 1)Q$.

EJEMPLO 8 Considere la señal de tiempo continuo

$$f(t) = 2 \sin(2\pi 5t), t \in R$$

la cual se grafica en la figura (1.1). La correspondiente señal cuantificada con un paso de cuantificación $Q = 0.25$ se muestra en la figura (1.1)

1.2 Transformación u Operaciones sobre la Base de Tiempo T

Estudiamos ahora las operaciones unarias sobre una señal que solo modifican su base de tiempo T .

Sean $T^{(1)}$ y $T^{(2)}$ dos bases de tiempos sobre las cuales se ha definido una aplicación o transformación

$$\varphi : T^{(1)} \rightarrow T^{(2)}$$

donde φ es inyectiva (1-1) y sobreyectiva (una biyección). Por lo tanto, la aplicación inverza existe

$$\varphi^{-1} : T^{(2)} \rightarrow T^{(1)}$$

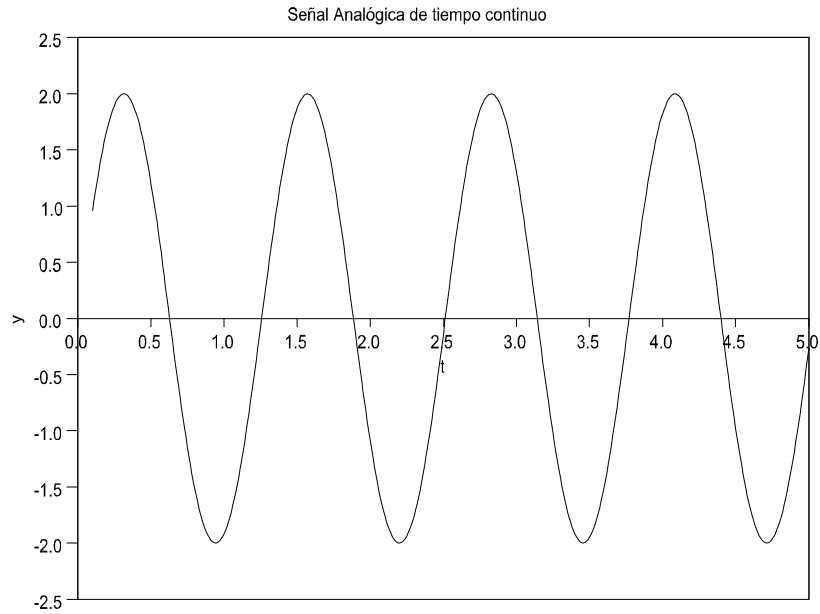
Si es posible que $T^{(1)} = T^{(2)} = T$, entonces diremos que T es **cerrado o invariante** bajo la transformación φ .

EJEMPLO 9 Sea $T = (-\infty, \infty)$ y $\tau \in R_+$ una constante real, fija pero arbitrario y defina la operación

$$\begin{aligned} \psi_\tau & : T \rightarrow T \\ \psi_\tau(\lambda) & = \lambda - \tau \end{aligned}$$

a

cuantificar1



4.pdf

De inmediato se observa que ψ_τ es inyectiva y sobreyectiva con

$$\begin{aligned}\psi_\tau^{-1} &: T \rightarrow T \\ \psi_\tau^{-1}(\lambda) &= \lambda + \tau\end{aligned}$$

En consecuencia, T es cerrado con respecto a ψ_τ

EJEMPLO 10 Sea $T = Z_p$ el conjunto de todos los enteros pares, $\tau \in Z_p$ un entero par, fijo y arbitrario y defina la operación:

$$\begin{aligned}\psi_\tau &: T \rightarrow T \\ \psi_\tau(k) &= k - \tau\end{aligned}$$

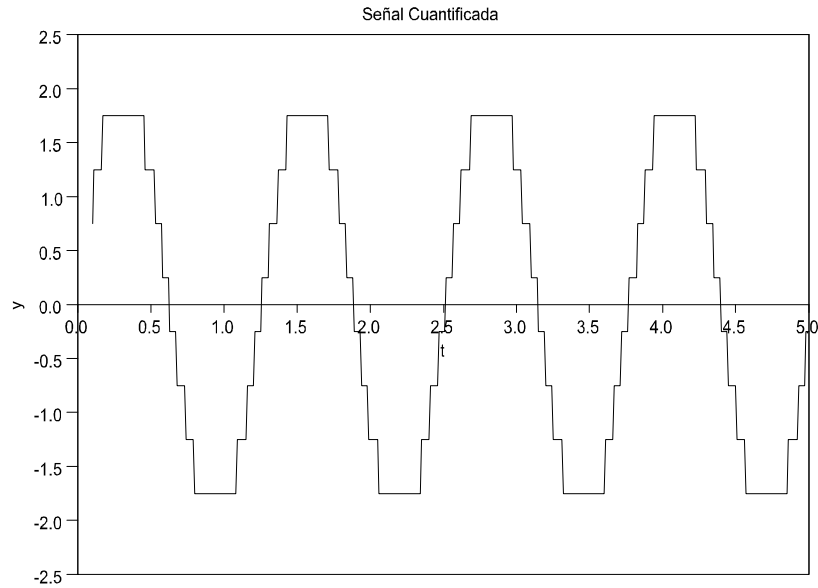
Tomando en cuenta que

$$\text{par} \pm \text{par} = \text{par}$$

Se observa de inmediato que

$$\begin{aligned}\psi_\tau^{-1} &: T \rightarrow T \\ \psi_\tau^{-1}(k) &= k + \tau\end{aligned}$$

es la operación inversa de ψ_τ , y por lo tanto, $T = Z_p$ es invariante con respecto a ψ_τ .



EJEMPLO 11 Sea $T^{(1)} = Z_{im}$ el conjunto de todos los enteros impares, $\tau \in Z_{im}$ un entero impar, fijo y arbitrario y defina la operación

$$\begin{aligned} \psi_\tau &: T^{(1)} \rightarrow T^{(2)} \\ \psi_\tau(k) &= k - \tau \end{aligned}$$

para $T^{(2)}$ una base de tiempo que por ahora dejaremos libre.

Ahora bien, tomando en cuenta que

$$impar \pm impar = par$$

de inmediato se concluye que $T^{(1)} = Z_{im}$ no es invariante con respecto a ψ_τ debido a que

$$rango(\psi_\tau) = Z_p$$

De los ejemplos anteriores, podemos inferir que debemos ser cuidadosos con respecto a ciertas operaciones sobre las bases de tiempo si se quieren garantizar que estas sean invariantes o cerradas bajo dichas transformaciones. Particular cuidado hay que poner cuando las bases de tiempo son discretas tal como veremos en el transcurso de estas notas.

DEFINICION 12 Sean $S_e^{(i)} = K^{T^{(i)}}$, $i = 1, 2$, dos conjuntos de señales con bases de tiempo $T^{(i)}$, $i = 1, 2$, respectivamente y con el mismo rango o conjunto de valores K . Suponga que se ha establecido una biyección

$$\varphi : T^{(1)} \rightarrow T^{(2)}$$

con aplicación inversa

$$\varphi^{-1} : T^{(2)} \rightarrow T^{(1)}$$

Una transformación de la base de tiempo de una señal $f_{viej} \in S_e^{(1)}$ bajo la acción de φ genera una señal $f_{nuev} \in S_e^{(2)}$ definida por

$$\begin{aligned} f_{nuev}(\lambda) &= f_{viej}[\varphi^{-1}(\lambda)] \\ &= [f_{viej} \circ \varphi^{-1}](\lambda) \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in T^{(1)}$.

Dicha operación se representa mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T^{(1)} & \xrightarrow{f_{viej}} & K \\ \varphi \downarrow \uparrow \varphi^{-1} & [=] & \downarrow \iota \\ T^{(2)} & \xrightarrow{f_{nuev}} & K \end{array}$$

con ι representado la función identidad sobre el conjunto de valores K . EL diagrama es conmutativo, y es lo que se representa con el símbolo " [=] ", en el sentido que el recorrido desde $T^{(2)}$ hasta K , es independiente del sentido en que se haga. o sea

$$\begin{aligned} f_{nuev} &= \iota \circ f_{viej} \circ \varphi^{-1} \\ &= f_{viej} \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

DEFINICION 13 (*Expansión, compresión e inversión de tiempo*) Sean $S_e^{(i)} = K^{T^{(i)}}$, $i = 1, 2$, dos conjuntos de señales con bases de tiempo $T^{(i)}$, $i = 1, 2$, respectivamente y con el mismo rango o conjunto de valores K . Para un $\alpha \in R_+$, (constante real y positiva) considere la transformación de eje de tiempo dada por

$$\varphi_{esc} : T^{(1)} \rightarrow T^{(2)} : \lambda \mapsto \lambda/\alpha$$

y

$$\varphi_{esc}^{-1} : T^{(2)} \rightarrow T^{(1)} : \lambda \mapsto \alpha\lambda$$

y por lo tanto, para toda señal $u_{viej} \in S_e^{(1)} = K^{T^{(1)}}$, la aplicación de la operación de escalamiento temporal en α unidades se define como

$$\begin{aligned} u_{nuev}(\lambda) &= u_{viej} \circ \varphi^{-1}(\lambda) \\ &= u_{viej}[\varphi^{-1}(\lambda)] = u_{viej}(\alpha\lambda) \end{aligned}$$

Si $\alpha > 1$, el tiempo es comprimido y se dice que se tiene una compresión temporal; por el contrario, si $\alpha \in (0, 1)$ el tiempo es expandido y se dice que se tiene una expansión temporal; mientras que si $\alpha = -1$, se tiene una reflexión temporal. Todas estas transformaciones que modifican la base de tiempo de la señal bajo tartamiento, se denominan escalamientos de tiempo.

De inmediato consideremos algunos ejemplos para ilustrar las distintas operaciones de escalamiento temporal.

EJEMPLO 14 Considere los espacios de señales $S_e^{(i)}$, $i = 1, 2$ donde $T^{(1)} = T^{(2)} = (-\infty, +\infty)$. Suponga que se ha definido

$$\varphi_{esc} : T^{(1)} \rightarrow T^{(2)} : t \mapsto t/0.5$$

o sea, para cada $t \in T^{(1)}$

$$\begin{aligned}\varphi_{esc}(t) &= 2t \\ \varphi_{esc}^{-1}(t) &= \frac{1}{2}t\end{aligned}$$

Por lo tanto, si la señal original es

$$u(t) = \sin(10t)$$

la señal nueva resultante de la expansión temporal correspondiente es

$$u^0(t) = u(0.5t) = \sin(5t)$$

cuyos grafos se presenta en la figuras (1.2 y (1.2)

Por otro lado, si

$$\varphi_{esc} : T^{(1)} \rightarrow T^{(2)} : t \mapsto t/2$$

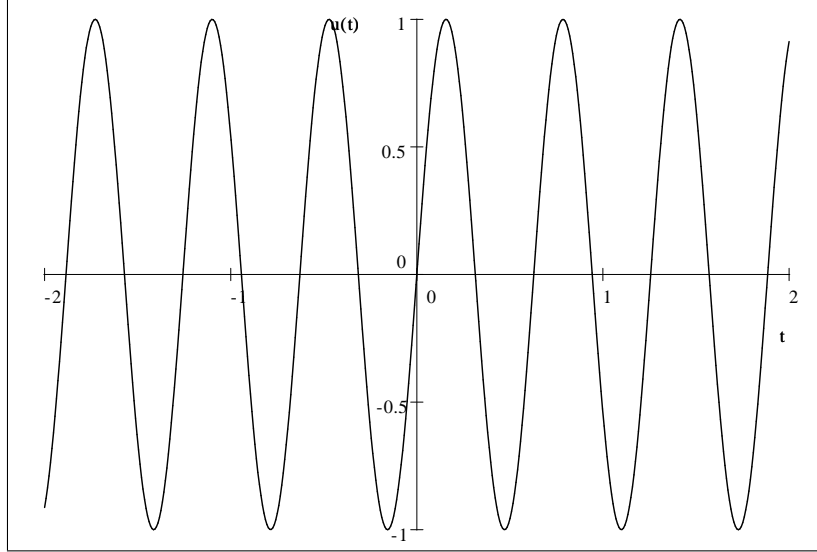
o sea, para cada $t \in T^{(1)}$

$$\begin{aligned}\varphi_{esc}(t) &= 0.5t \\ \varphi_{esc}^{-1}(t) &= 2t\end{aligned}$$

la señal resultante de la contracción temporal correspondiente es

$$u^1(t) = u(2t) = \sin(20t)$$

la cual se muestra en la figura (1.2).



EJEMPLO 15 (*Reflexión Temporal*) Considere la señal

$$\text{signo} : T \rightarrow R$$

dada por: para todo $\lambda \in T$,

$$\text{signo}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda = 0, \\ -1, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Su versión de tiempo continuo se presenta en la figura (15). Suponga que se ha definido la operación de reflexión temporal:

$$\varphi_{\text{reflex}} : T \rightarrow T : t \mapsto -t$$

o sea, para cada $t \in T^{(1)} = T = (-\infty, +\infty)$

$$\varphi_{\text{esc}}(t) = -t$$

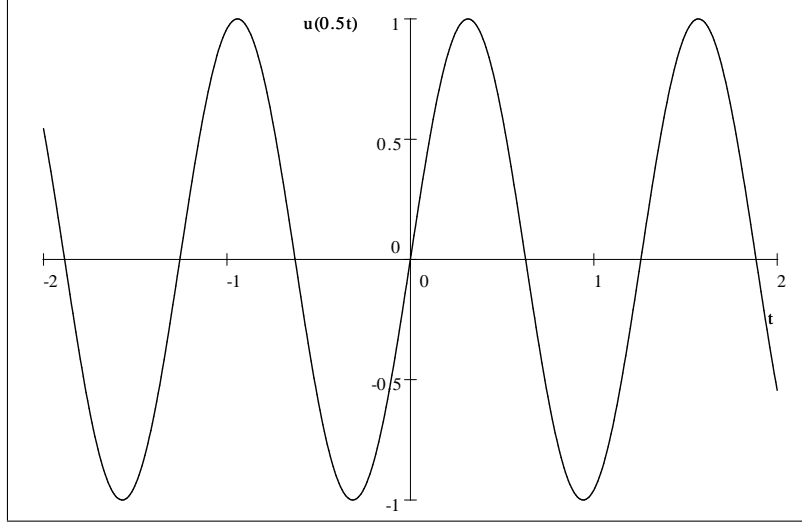
$$\varphi_{\text{esc}}^{-1}(t) = -t$$

Por lo tanto, la señal reflejada en el tiempo será

$$\begin{aligned} u^0(t) &= \text{signo} \circ \varphi_{\text{esc}}^{-1}(t) \\ &= \text{signo}[\varphi_{\text{esc}}^{-1}(t)] \\ &= \text{signo}(-t) \end{aligned}$$

la cual se muestra en la figura (15)

El efecto más interesante de esta aplicación es que convierte el pasado en futuro y el futuro en pasado, dejando el presente sin variación alguna.



Otra manera de generar una nueva señal procesando la base de tiempo de una señal dada es mover o desplazar el origen. Informalmente, dada una señal $u \in S_e^{(1)}$ con base de tiempo $T^{(1)} = T$, hacemos el cambio

$$\lambda \leftarrow \lambda - \theta$$

Este cambio hara que el origen de la señal u se traslade a $\lambda = \theta$.

DEFINICION 16 (*Traslaciones temporales*). Para cada $\theta \in R$, considere la transformación de eje de tiempo dada por

$$\rho : T^{(1)} \rightarrow T^{(2)} : \lambda \mapsto \lambda - \theta$$

y

$$\rho^{-1} : T^{(2)} \rightarrow T^{(1)} : \lambda \mapsto \lambda + \theta$$

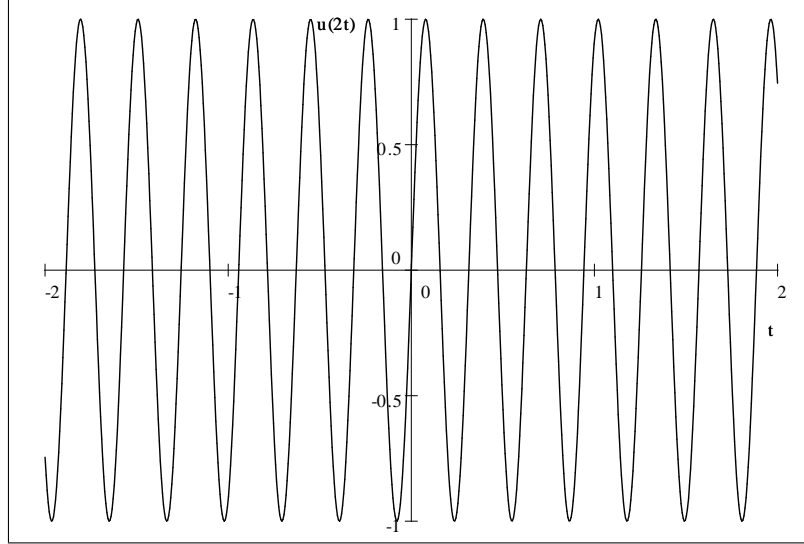
y por lo tanto, la nueva señal es

$$\begin{aligned} u_{nuev}(\lambda) &= u_{viej} \circ \rho^{-1}(\lambda) \\ &= u_{viej}[\rho^{-1}(\lambda)] \\ &= u_{viej}(\lambda + \theta) \end{aligned}$$

para cada $\lambda \in T^{(2)}$.

Si $\theta > 0$, entonces u_{nuev} es la versión adelantada (o desplazada hacia la derecha) en el tiempo por θ unidades; mientras que si $\theta < 0$, entonces u_{nuev} es la versión atradasa o retardada en el tiempo por θ unidades.

Es importante observar que no exigimos que las bases de tiempo coincidan, sin embargo, lo que si exige la definición es que esta esté bien definida en el sentido



que para todo $\lambda \in T^{(1)}$, $\lambda + \theta \in T^{(2)}$. Este es un punto muy importante cuando se estudien señales de tiempo discreto ya que de no garantizar las condiciones exigidas implícitamente por la definición, perderemos datos de la señal tratada.

EJEMPLO 17 En la figura (17) se muestra la señal de tiempo continuo

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ -t + 2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Suponga que se quiere aplicar la operación de adelanto en una unidad de la señal u ; esto es,

$$\rho : T^{(1)} \rightarrow T^{(2)} : \lambda \mapsto \lambda - 1$$

o sea,

$$\rho^{-1} : T^{(2)} \rightarrow T^{(1)} : \lambda \mapsto \lambda + 1$$

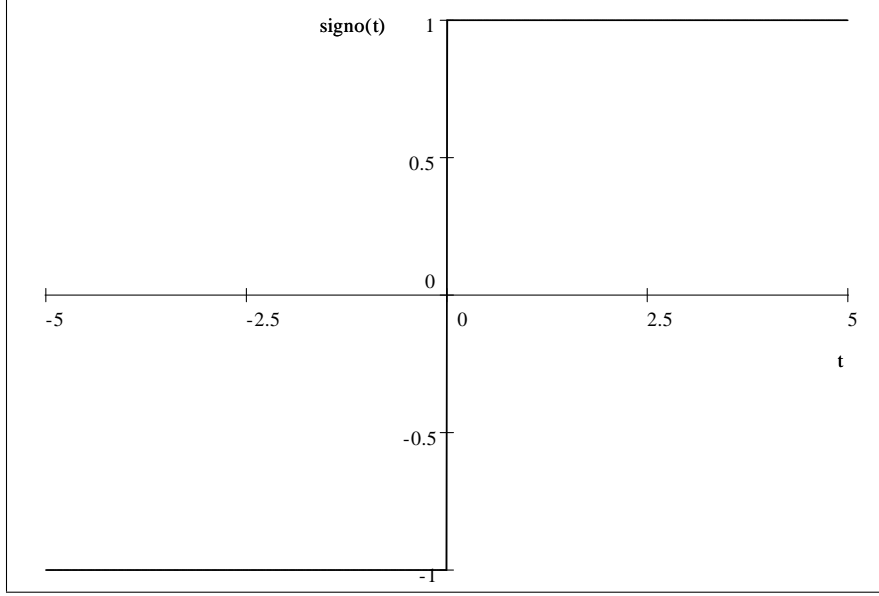
y por lo tanto, la nueva señal es

$$\begin{aligned} u_{nuev}(\lambda) &= u_{viej} \circ \rho^{-1}(\lambda) \\ &= u_{viej}[\rho^{-1}(\lambda)] \\ &= u_{viej}(\lambda + 1) \end{aligned}$$

la cual se grafica en la figura (17).

DEFINICION 18 Sea S_e el conjunto de todas las señales con bse de tiempo T y conjunto de valores K . Dado un $\theta \in T$, tal que para todo $\lambda \in T$, $\lambda + \theta$, defina el operador

$$q^\theta : S_e \rightarrow S_e : u \mapsto q^\theta(u) : \lambda \mapsto u(\lambda + \theta)$$



como el operador de desplazamiento de θ unidades.

Y el correspondiente operador inverso es

$$q^{-\theta} : S_e \rightarrow S_e : u \mapsto q^{-\theta}(u) : \lambda \mapsto u(\lambda - \theta)$$

como el operador de desplazamiento de $-\theta$ unidades.

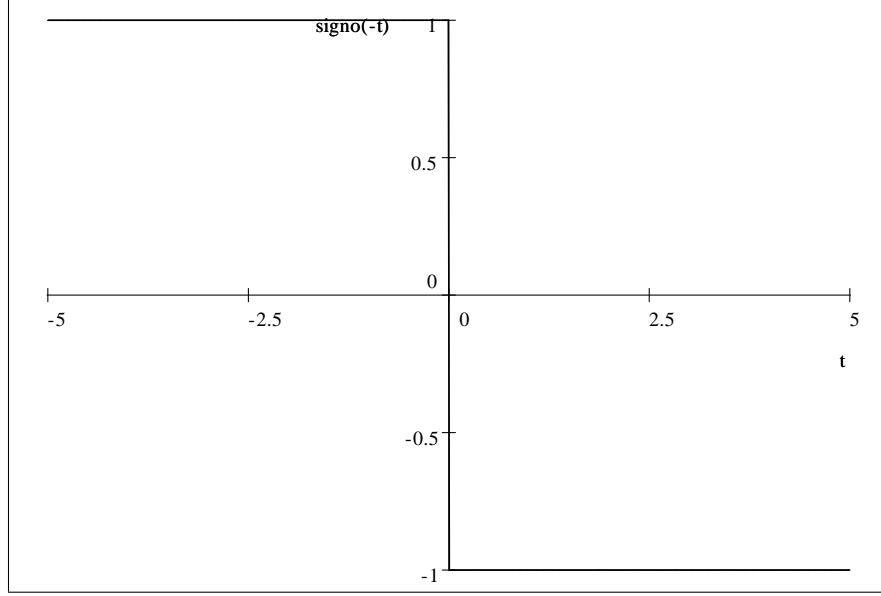
Si $\theta = 1$, a los operadores se denominan unitarios y se expresan por q y q^{-1} respectivamente. También se definen recursivamente la concatenación de estos operadores; esto es, para todo $i \in \mathbb{Z}$, $q^{i\theta}(u) = q^\theta(q^{(i-1)\theta}(u))$ con $q^0 = i =$ operador de identidad.

1.2.1 Muestreo e interpolación

Las operaciones de muestreo e interpolación son también operaciones que modifican el eje de tiempo de las señales. Son estas operaciones que sirven de interface entre las señales discretas y las continuas en el tiempo y de ahí su importancia en las aplicaciones de control digital, ya que las computadoras o cualquier dispositivo digital para poder procesar una señal de tiempo continuo, esta debe ser convertida en una señal de tiempo discreto (muestreo), y generalmente la señal generada por un computador de tiempo discreto para ser aplicada a una planta o sistema físico debe convertirse en una señal de tiempo continuo (interpolación).

Consider las operaciones unitarias descritas en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 T^{(1)} & \xrightarrow{f_{viej}} & K^{(1)} \\
 \uparrow \varphi^{-1} & \lrcorner \text{=} & \downarrow \Psi \\
 T^{(2)} & \xrightarrow{f_{nuev}} & K^{(2)}
 \end{array}$$



o sea:

$$f_{nuev} = \Psi \circ f_{viej} \circ \varphi^{-1}$$

O sea, para toda $f_{viej} \in S_e^{(1)}$, y para cada $\lambda \in T$

$$f_{nuev}(\lambda) = \Psi(f_{viej}(\varphi^{-1}(\lambda)))$$

En las operaciones de muestreo se asume: a) $T^{(1)}$ es una base de tiempo continuo, T_{con} , b) T^2 es una base de tiempo discreto, T_{disc} , c) $K^{(1)} = K^{(2)} = K \in \{R, C\}$ y $\Psi =$ identidad.

DEFINICION 19 Sea T_{con} y T_{dis} bases de tiempo continuo y discreto respectivamente tales que $T_{dis} \subset T_{con}$, y

$$T_{disc} = \{t_k : k \in Z\}$$

al operador Sa definido por

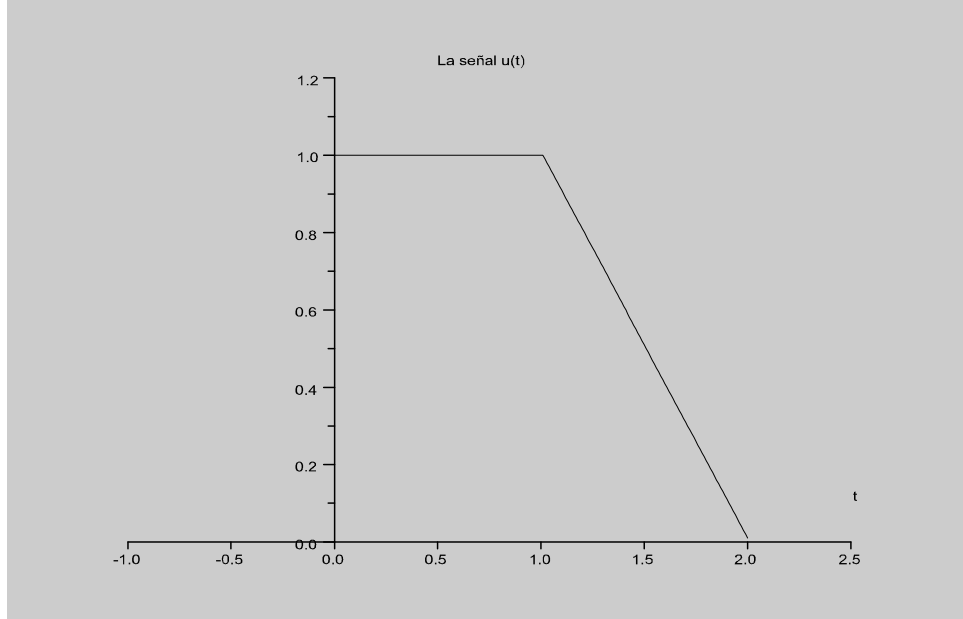
$$Sa : S_e^{(1)} \rightarrow S_2^{(2)} : f \mapsto f_m = Sa(f)$$

donde

$$f_m(t_k) = [Sa(f)](k) = f(t)|_{t=t_k} = f(t_k)$$

para cada $t_k \in T_{dis}$ (para cada $k \in Z$), se denomina **operador de muestreo**. A cada $t_k \in T_{dis}, k \in Z$, se denomina instante de muestreo, mientras que a la señal $f_m = \{f(t_k) : k \in Z\}$ se le llama la **señal muestreada** de f .

Si los instantes de muestreo están uniformemente espaciados, o sea, existe un número real $h > 0$ tales que $t_k = kh \in T_{disc}$ para todo $k \in Z$, se dice que la señal f



ha sido **uniformemente muestreada con período de muestreo h** y el operador de muestreo se representará por S_h .

En la figura (19) se representa esquemáticamente un dispositivo que realiza la operación de muestreo y denominando muestreador

EJEMPLO 20 Sea $a \in R$, la señal exponencial "generalizada", causal y con constante de tiempo $\frac{1}{a}$ se define como

$$\exp : T \rightarrow R$$

para todo $\lambda \in T$,

$$\exp(\lambda) = \begin{cases} e^{a\lambda}, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

La versión de dicha señal de tiempo continuo para el caso $a = 0.5$; o sea,

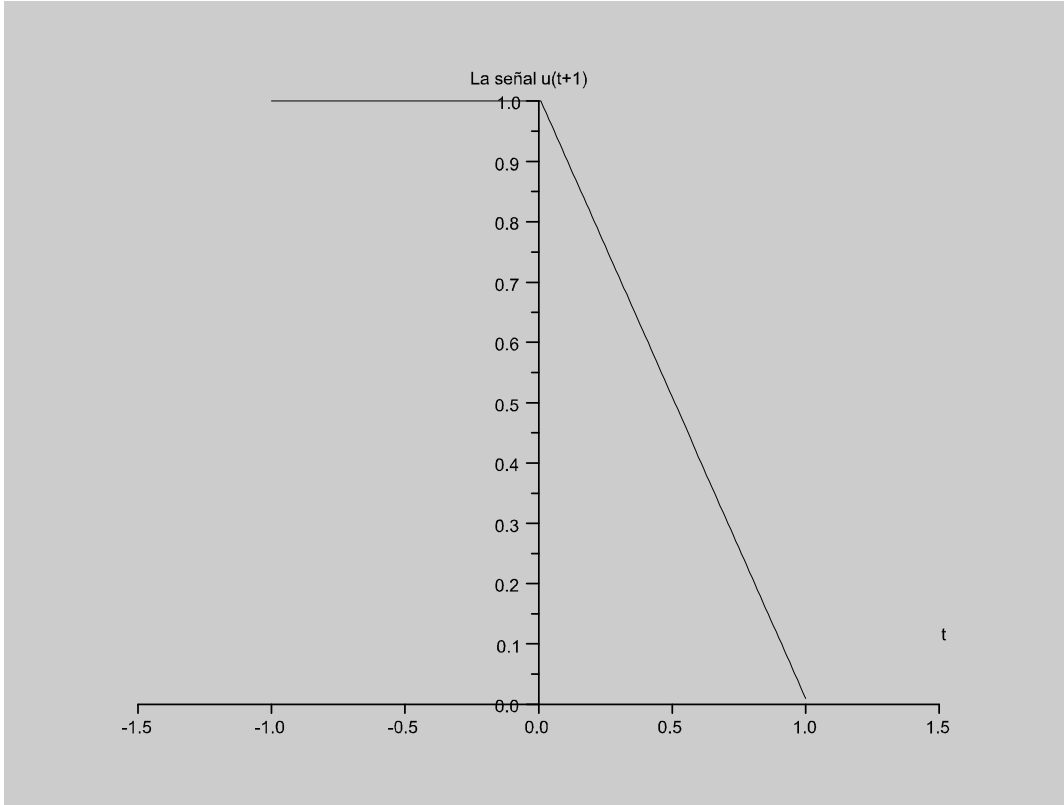
$$\exp(\lambda) = \begin{cases} e^{0.5t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

se muestra en la figura (20).

Supongamos que se desea muestrear uniformemente la señal exponencial de tiempo continuo con un período de muestreo $h = 0.5$, en consecuencia

$$S_a[\exp(t)] = \exp_m(kh) = \begin{cases} e^{0.25k}, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

la cual se representa gráficamente en la figura (20)



El operador de muestreo S_a tiene muchas propiedades que desafortunadamente requieren de una estructura algebraica y/o analítica más rica que la que puede tener el conjunto de señales de tiempo continuo $S_e^{cont} = K^{T_{con}}$, y por lo tanto las estudiaremos más adelante en otras notas.

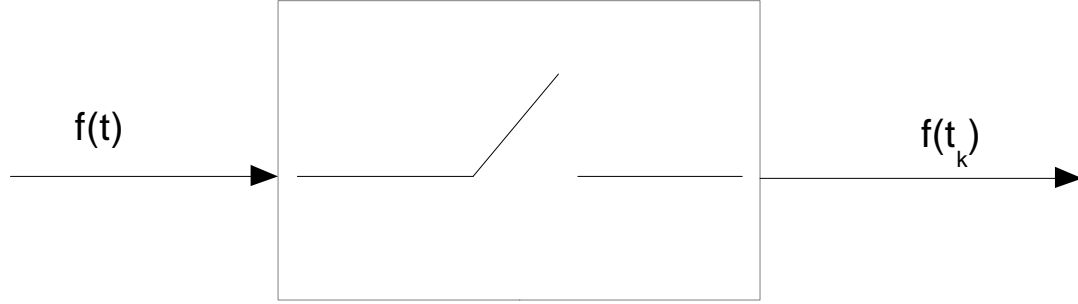
Por otro lado, la operación inversa a la de muestreo también es necesaria en la práctica. De hecho, esta situación se presenta cuando cualquier dispositivo digital, como la computadora por ejemplo, genera una señal (discreta) que necesita ser procesada por un instrumento físico que solo actúa sobre señales continuas en el tiempo. Existen diversas maneras de convertir una señal discreta en una señal continua, y solo se presentará en esta sección una denominada interpolación la cual tiene la ventaja que la señal continua generada coincide con la señal discreta en los instantes de muestreo.

Nuevamente considere el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 T^{(1)} & \xrightarrow{f_{viej}} & K^{(1)} \\
 \varphi \downarrow \uparrow \varphi_{der} & \left[= \right] & \downarrow \Psi \\
 T^{(2)} & \xrightarrow{f_{nuev}} & K^{(2)}
 \end{array}$$

o sea:

$$f_{nuev} = \Psi \circ f_{viej} \circ \varphi^{-1}$$



Muestreador

O sea, para toda $f_{viej} \in S_e^{(1)}$, y para cada $\lambda \in T$

$$f_{nuev}(\lambda) = \Psi(f_{viej}(\varphi^{-1}(\lambda)))$$

donde suponemos: a) $T^{(1)} = T^{disc} = \{t_k \in R : k \in z\}$ es una base de tiempo discreta, b) $T^{(2)} = T^{con} \subset R$, una base de tiempo continua tal que

$$T^{disc} \subset T^{con}$$

c) $K^{(1)} = K^{(2)} = K \in R$ d) la función u operación $\varphi : T^{disc} \rightarrow T^{con}$ es la función de inclusión, ya que

$$\begin{aligned} inc & : T^{disc} \rightarrow T^{con} \\ inc(t_k) & = t_k \end{aligned}$$

pero note que la inc no tiene inversa y lo mejor que podemos hacer es

$$\begin{aligned} \varphi_{der} & : T^{con} \rightarrow T^{disc} \\ \varphi_{der}(t) & = \begin{cases} t, & t \in T^{disc} \\ t^*, & t \in T^{con} \setminus T^{disc} \end{cases} \end{aligned}$$

para algún $t^* \in T^{disc}$ fijo pero arbitrario. Es importante observar que

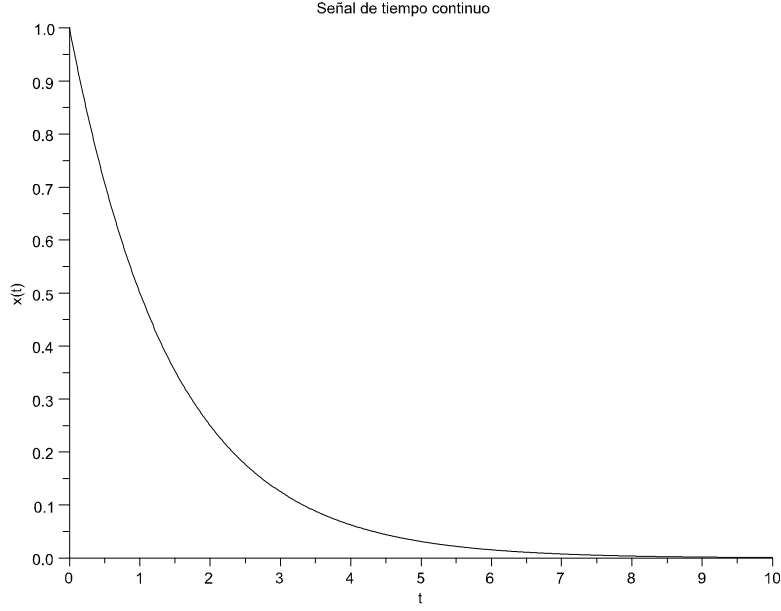
$$\varphi_{der}[inc(t_k)] = t_k$$

Y finalmente

$$\Psi : K \rightarrow K$$

se define como cualquier función tal que

$$f_{nuev}(t) = \Psi(f_{viej}(\varphi_{der}(t)))$$



y

$$\begin{aligned}
 f_{nuev}(t_k) &= \Psi(f_{viej}(\varphi_{der}(t_k))) \\
 &= \psi(f_{viej}(t_k)) \\
 &= f_{viej}(t_k)
 \end{aligned}$$

y para todo $t \in t \in T^{con} \setminus T^{disc}$

$$f_{nuev}(t) = \Psi(f_{viej}(t^*)) \quad (1)$$

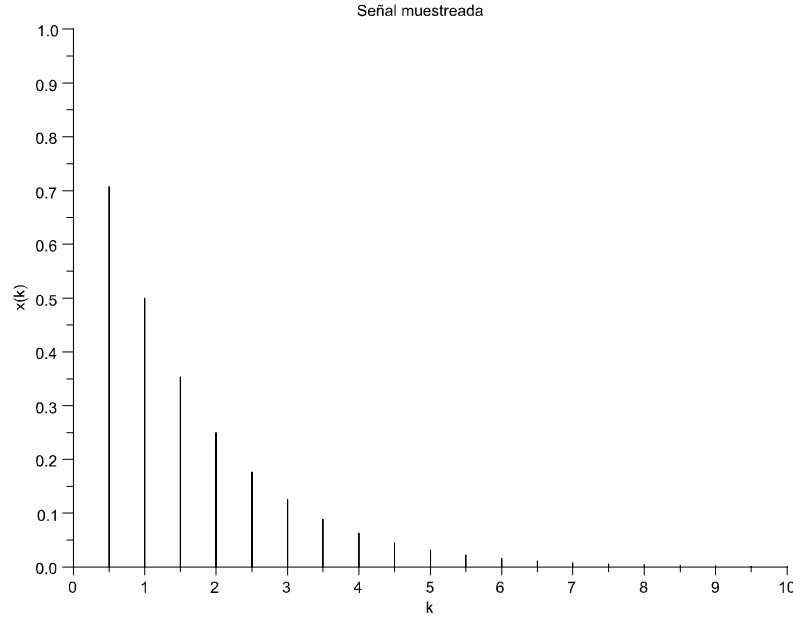
Obviamente, queda claro que no se ha especificado los valores que asume Ψ en los intervalos (t_k, t_{k+1}) . $k \in \mathbb{Z}$. Eso obedece a que el proceso de construcción o generación de una señal de tiempo continuo partiendo de una señal de tiempo discreto, aun exigiendo que coincidan dichas señales en los instantes t_k , no es único y está definido precisamente por la manera en la cual se define Ψ en cada intervalo (t_k, t_{k+1}) .

Todo el proceso u operación sobre la señal discreta $f_{viej} = f_{discr} \in S_e^{discr}$ para generar $f_{nuev} = f_{cont} \in S_e^{cont}$ definido por (1) se representa mediante un operador

$$H : S_e^{discr} \rightarrow S_e^{cont}$$

denominado operador de interpolación o reconstrucción. Por lo tanto, para toda $f_{discr} \in S_e^{discr}$:

$$f_{cont} = H(f_{discr})$$



y para todo $t \in T^{cont}$,

$$\begin{aligned} f_{cont}(t) &= H(f_{disc})(t) \\ &= \Psi(f_{disc}(\varphi_{der}(t))) \end{aligned}$$

El esquema de lo que se quiere hacer en la práctica se muestra en la figura (1.2.1) y nos interesaría que se cumpliera lo siguiente: Si

$$\begin{aligned} H &: S_e^{disc} \rightarrow S_e^{cont} \\ S_a &: S_e^{cont} \rightarrow S_e^{disc} \end{aligned}$$

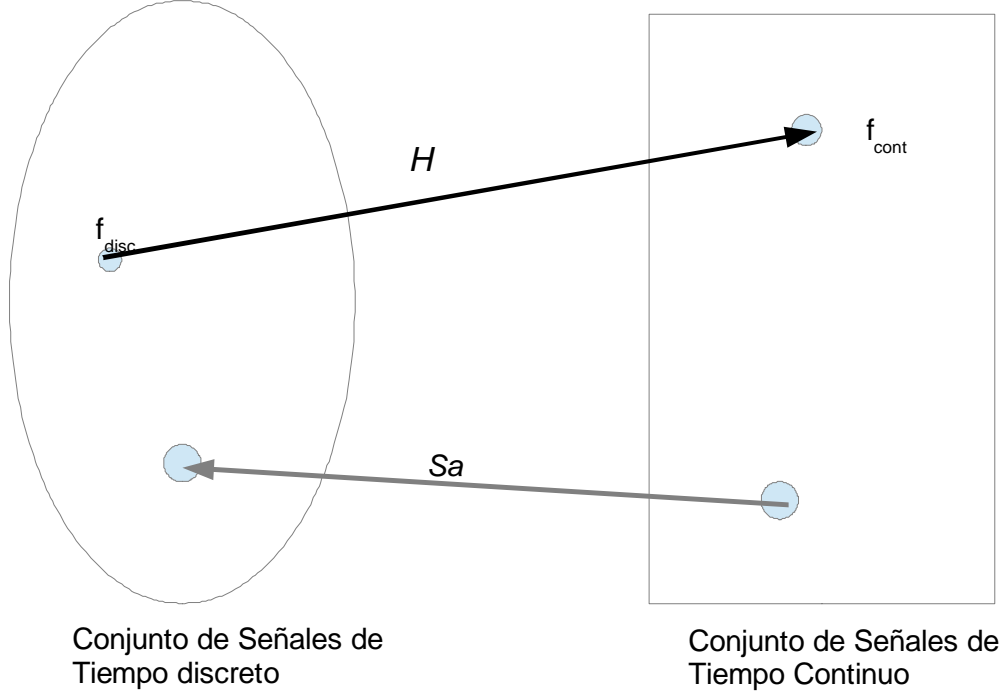
entonces

$$\begin{aligned} H \circ S_a &= i_{cont} \\ S_a \circ H &= i_{disc} \end{aligned}$$

con i_{cont}, i_{disc} son las funciones identidad de S_e^{cont} y S_e^{disc} respectivamente.

Desafortunadamente, lo anterior es imposible de cumplir en la práctica ya que en general:

- a) El operador de muestreo S_a no es inyectivo (uno a uno),
- b) El operador de interpolación H no es sencillo definirlo si exigimos que este sea un operador causal en el sentido que los valores que asuma solo dependan del presente o pasado en la base de tiempo T^{disc} , y mucho menos hacer que este sea único.



DEFINICION 21 Sea

$$H : S_e^{discr} \rightarrow S_e^{cont}$$

un operador de interpolación o reconstrucción tal que para toda $f_{discr} \in S_e^{discr}$:

$$f_{cont} = H(f_{discr})$$

y para todo $t \in T^{cont}$,

$$\begin{aligned} f_{cont}(t) &= H(f_{discr})(t) \\ &= \Psi(f_{discr}(\varphi_{der}(t))) \end{aligned}$$

tal que

$$f_{cont}(t) = f_{discr}(t_k) \text{ para cada } t \in [t_k, t_{k+1}), k \in Z$$

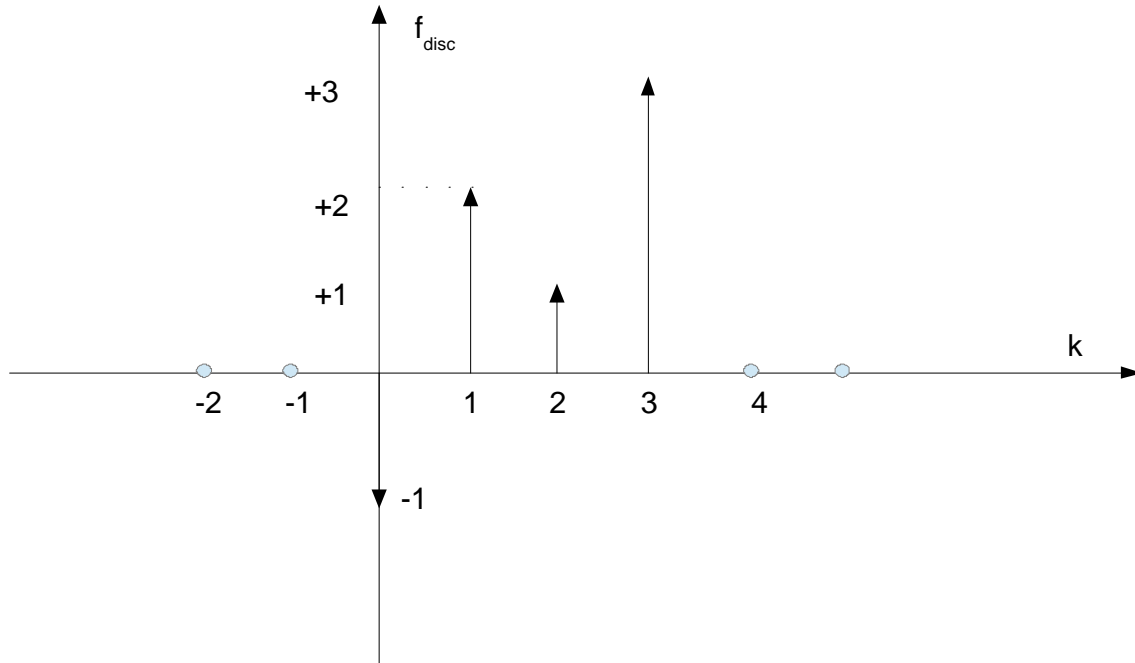
entonces se dice que H es un interpolador de orden cero (Z.O.H).

En el caso que para algún $h > 0$, la base de tiempo discreto esté uniformemente espaciada y dada por $T^{discr} = Z(h)$, entonces el interpolador de orden cero se define por

$$H_{zoh} : S_e^{discr} \rightarrow S_e^{cont}$$

y para toda $f_{discr} \in S_e^{discr}$, y todo $t \in T^{discr}$,

$$f_{con}(t) = H[f_{discr}](t) = f_{discr}(kh), \text{ para cada } t \in [kh, kh + h), k \in Z.$$



EJEMPLO 22 Consider la señal de tiempo discreto definida por

$$f_{disc}(k) = \begin{cases} 0, & k \leq -1, \\ -1, & k = 0, \\ 2, & k = 1 \\ 1, & k = 2, \\ 3, & k = 3 \\ 0, & k \geq 4. \end{cases}$$

la cual se representa en la figura (22)

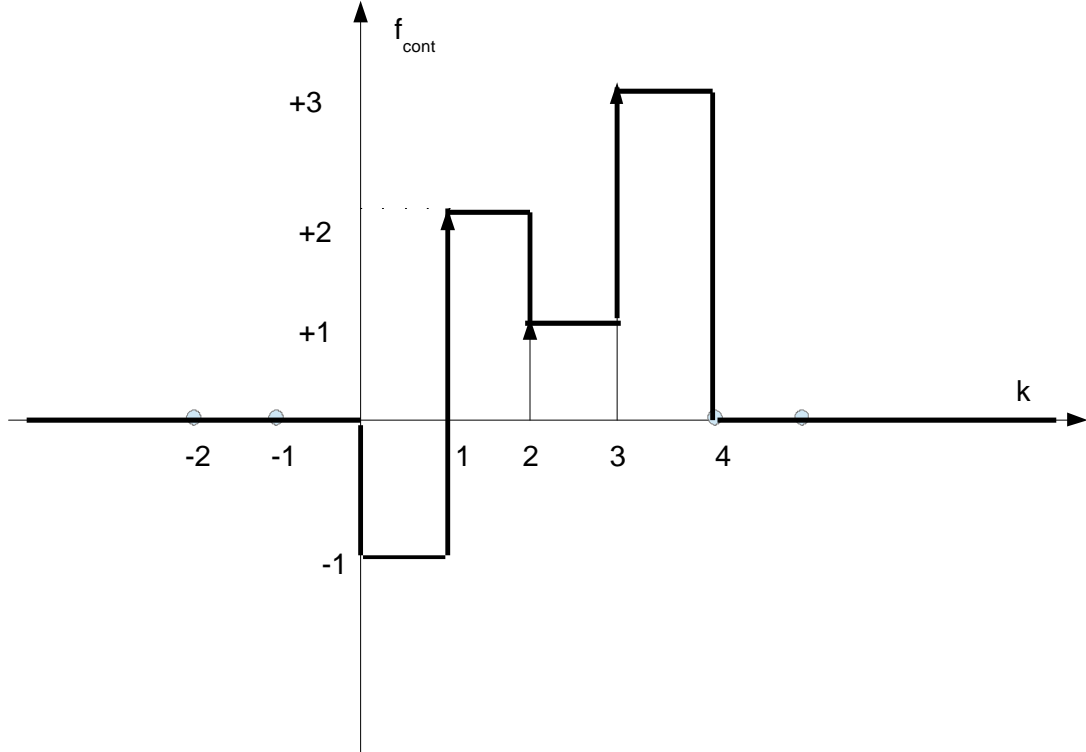
y la correspondiente señal reconstruida con la operación ZOH se muestra en la figura (22)

DEFINICION 23 (Interpolación de primer orden), Sea

$$H : S_e^{discr} \rightarrow S_e^{cont}$$

un operador de interpolación o reconstrucción tal que para toda $f_{discr} \in S_e^{discr}$:

$$f_{cont} = H(f_{disc})$$



y para todo $t \in T^{cont}$,

$$\begin{aligned} f_{cont}(t) &= H(f_{disc})(t) \\ &= \Psi(f_{disc}(\varphi_{der}(t))) \end{aligned}$$

tal que

$$f_{cont}(t) = \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} f_{disc}(t_k) + \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} f_{disc}(t_{k-1}), \text{ para cada } t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ y } k \in Z$$

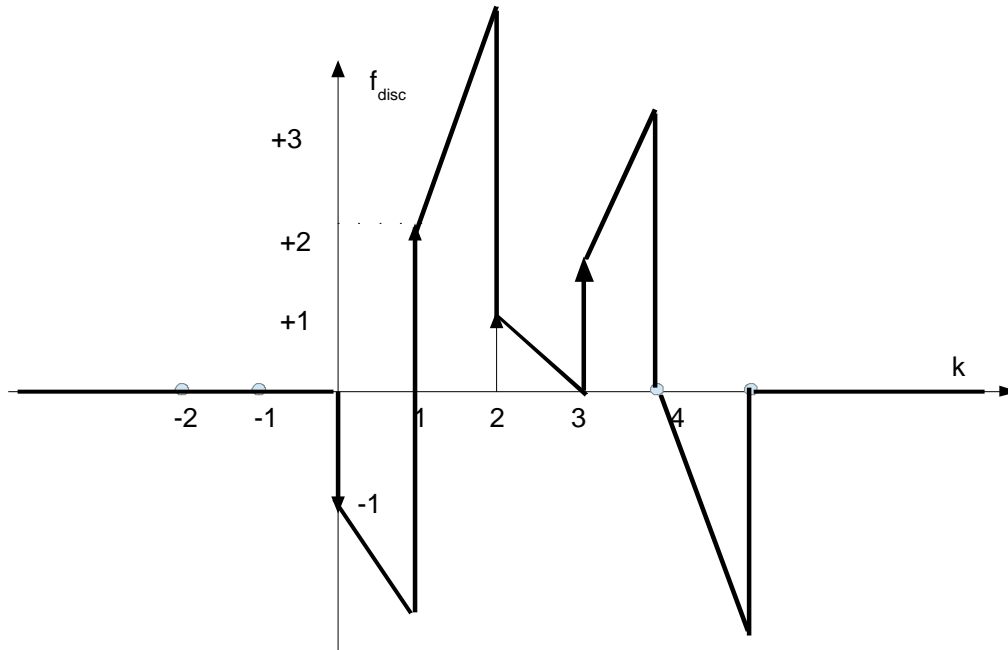
En el caso que para algún $h > 0$, la base de tiempo discreto esté uniformemente espaciada y dada por $T^{disc} = Z(h)$, entonces el interpolador causal de primer orden se define por

$$H_{zoh} : S_e^{discr} \rightarrow S_e^{cont}$$

y para toda $f_{discr} \in S_e^{discr}$, y todo $t \in T^{disc}$;

$$f_{cont}(t) = \frac{t - (k-1)h}{h} f_{discr}(kh) + \frac{kh - t}{h} f_{discr}((k-1)h), \text{ para cada } t \in [kh, kh+h) \text{ y } k \in Z.$$

EJEMPLO 24 Considere la señal de tiempo discreto f_{disc} estudiada en el ejemplo anterior, si esta se procesa mediante un interpolador FOH s genera la señal de tiempo continuo que se muestra en la figura (24)



La interpolación de primer y cero orden son casos particulares de interpolación causal de señales de tiempo discreto, en el sentido que

$$f_{cont}(t) = \text{funcion}(\dots t_{k-1}, t_k), t_k \leq t, k \in \mathbb{Z}.$$

Un ejemplo de reconstrucción no causal y de gran importancia histórica es la reconstrucción a través de la señal $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

DEFINICION 25 (Interpolación por sinc). Sea

$$H : S_e^{discr} \rightarrow S_e^{cont}$$

un operador de interpolación o reconstrucción tal que para toda $f_{discr} \in S_e^{discr}$:

$$f_{cont} = H(f_{discr})$$

tal que para todo $t \in T^{cont}$

$$f_{cont}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{discr}(t_k) \text{sinc}\left(\pi \frac{t - t_k}{t_k - t_{k-1}}\right)$$

Es evidente que interpolación de una señal discreta en el tiempo seguida del muestro sobre el eje de tiempo original resulta en una exacta reconstrucción de la señal discreta en el tiempo; esto es, para todo $f_{disc} \in S_e^{disc}$ tal que $T_{dis} \subset T_{con}$ se cumple que

$$S_h [H (f_{disc})] = f_{disc}$$

Sin embargo, el muestreo de una señal continua en el tiempo seguida por la interpolación de la señal resultante no produce, en general, la señal continua original, o sea,

$$H [S_h (f_{cont})] \neq f_{con}$$

La falla radica en que el operador de reconstrucción en general no es sobreyectivo, ya que no todas las señales continuas son constantes o lineales a trozos.

En conclusión: “al menos que se impongan restricciones adicionales sobre el conjunto de las señales continuas en el tiempo tratadas, las operaciones de muestreo y reconstrucción no son operaciones inversas.”

References

- [1] Mason, Samuel J.y H.J. Zimmermann. "Circuitos, señales y Sistemas electrónicos". CICSA, Ciudad de Mexico. Mexico 1962.
- [2] Klir, George J. "An Approach to General Systems theory". Van Nostrand Reinhold Company. New York. USA. 1969.
- [3] Ziegler, P., H., Praehofer, T. G.Kim. "Theory of Modeling and Simulation", Second Edition. Academic Press. San Diego. USA, 2000.
- [4] Kolmogorov, A.N. y S.V. Fomin. "Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional". Segunda Edición. Editorial MIR. Moscú, Rusia. 1975
- [5] Kwakernaak, H. y R. Sivan. "Modern Signals and Systems". Prentice Hall. New Jersey. USA. 1991
- [6] Lindner, K.D., "Introducción a las Señales y los Sistemas". McGraw Hill. Colombia. 2002.
- [7] Ziemer R. E.,W. Tranter, D. Fannin. "Signals and Systems: Continuous and Discrete". Second Edition. MacMillan Publishing Company. New York, USA. 1989
- [8] <http://es.scribd.com/doc/62488949/Lab-1>